

Tilastomatematiikka, Harjoitus 1

Tehtävä 1.

a) Olkoon $X \sim N(0, 1)$. Laske $P(X < 1,72)$ ja $P(X \geq 1,37)$.

b) Olkoon $X \sim N(1, 9)$. Laske $P(0,5 \leq X \leq 1,5)$.

Ratkaisu:

Ratkaistaan todennäköisyydet normaalijakauman avulla.

a)

X noudattaa standardinormaalijakaumaa, joten voidaan laskea suoraan

$$P(X < 1,72) = P(Z < 1,72)$$

```
normcdf(1.72)
```

```
ans = 0.9573
```

$$P(X \geq 1,37) = P(Z \geq 1,37) = 1 - P(Z < 1,37)$$

```
1-normcdf(1.37)
```

```
ans = 0.0853
```

b)

Nyt X joudutaan normalisoimaan. Lasketaan

$$P(0,5 \leq X \leq 1,5)$$

$$= P(X \leq 1,5) - P(X \leq 0,5) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{1,5-1}{\sqrt{9}}\right) - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{0,5-1}{\sqrt{9}}\right)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{1}{6}\right) - P\left(Z \leq -\frac{1}{6}\right) = P\left(Z \leq \frac{1}{6}\right) - \left(1 - P\left(Z \leq \frac{1}{6}\right)\right) = 2P\left(Z \leq \frac{1}{6}\right) - 1$$

```
2*normcdf(1/6)-1
```

```
ans = 0.1324
```

Vastaus: **a)** 0,9573 ja 0,0853 **b)** 0,1324

Tehtävä 2.

Ravintolassa on arkisin lounasaikaan tarjolla 'Syö niin paljon kuin jaksat'-buffetlounas hintaan 8,95 euroa (per asiakas). Aiempien kokemusten perusteella ravintola on havainnut, että kustannukset per

aterioitsija ovat lounasaikaan keskimäärin 8,20 euroa (raaka-aineet, palkkakulut yms.) kustannusten varianssin ollessa noin 9 euroa. Eräänä päivänä ravintolassa aterioi lounasaikana 100 ravintolan vakituista asiakasta. Laske todennäköisyys sille, että ravintola tekee tuona päivänä voittoa.

Ratkaisu:

Tehtävänannosta saadaan, että odotusarvo on 8,20, varianssi on 9 ja $n = 100$. Keskeistä raja-arvolauseetta käyttämällä voidaan ratkaista todennäköisyys normaalijakauman avulla. Ravintola tekee voittoa, kun kustannusten keskiarvo on alle 8,95 euroa.

$$P(X \leq 8,95) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \leq \frac{8,95 - 8,20}{\sqrt{9} / \sqrt{100}}\right) = P(Z \leq 2,5)$$

```
normcdf(2.5)
```

```
ans = 0.9938
```

Vastaus: 0.9938

Tehtävä 3.

Ratkaisu:

Vastaus:

Tehtävä 4.

a)

Opiskelijatapahtumaan on 250 lippua myynnissä. Aikaisempien kokemusten perusteella tiedetään, että yhden opiskelijan ostamien lippujen lukumäärän odotusarvo on 2,4 ($\mu = 2,4$) hajonnan ollessa $\sigma = 2$. Jonossa on 100 lipun haluavaa opiskelijaa. Millä todennäköisyydellä jokainen jonottaja saa lipun?

b)

Heitetään kolikkoa 250 kertaa. Millä todennäköisyydellä saadaan vähintään 140 klaavaa?

Ratkaisu:

a)

Tehtävänannosta saadaan odotusarvon ja hajonnan lisäksi $n = 100$. Halutaan, että jokainen jonottaja saa lipun, joten keskiarvon halutaan olevan nyt alle $250/100 = 2,5$.

$$P(X \leq 2,5) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \leq \frac{2,5 - 2,4}{2 / \sqrt{100}}\right) = P(Z \leq 0,5)$$

```
normcdf(0.5)
```

```
ans = 0.6915
```

b)

Olkoon $X = \text{'Kolikko on klaava'}$. On yhtä todennäköistä saada klaava ja kruunu, joten odotusarvo on $1 \cdot 0,5 = 0,5$. Varianssiksi puolestaan saadaan $1^2 \cdot 0,5 - 0,5^2 = 0,25$. Heittoja eli toistoja on 250 eli $n = 250$. Nyt halutaan, että keskiarvo on yli 140/250.

$$P(X > 0,56) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{0,56 - 0,5}{\sqrt{0,25}/\sqrt{250}}\right) \approx 1 - P(Z \leq 1,8974)$$

```
1-normcdf(0.06/(0.5/sqrt(250)))
```

```
ans = 0.0289
```

Vastaus: **a)** 0,6915 **b)** 0.0289

Tehtävä 5.

Tietty työryhmä kokoontuu viikottain 2 h ajan. Paikalla olevien jäsenten lukumäärän X todennäköisyydet ovat oheisessa taulussa. Arvioi Keskeistä raja-arvolauseetta käyttäen millä todennäköisyydellä työryhmä saa työnsä valmiiksi 25 viikossa, kun siihen tarvitaan 250 h ja kaikki jäsenet tekevät työtä koko sen 2 h (silloin kun ovat paikalla).

x	4	5	6	7
$P(X=x)$	0.1	0.4	0.3	0.2

Ratkaisu:

Olkoon $X = \text{'Paikalla olevien jäsenten lukumäärä'}$. Taulukon perusteella voidaan laskea lukumäärälle odotusarvo

$$E(X) = 0,1 \cdot 4 + 0,4 \cdot 5 + 0,3 \cdot 6 + 0,2 \cdot 7 = 5,6$$

Varianssi puolestaan voidaan laskea kaavalla $E(X^2) - (E(X))^2$ josta saadaan

$$\text{Var}(X) = 0,1 \cdot 4^2 + 0,4 \cdot 5^2 + 0,3 \cdot 6^2 + 0,2 \cdot 7^2 - 5,6^2 = 0,84$$

Työn valmistumiseen vaaditaan 250 h ja yksi läsnäolokerta tuottaa 2 h työtä. Läsnäolokertoja vaaditaan siis (vähintään) 125. Aikaa on annettu 25 viikkoa ja koska kokoontumiset ovat viikottaisia, läsnäolokertoja pitää olla keskimäärin $125/25 = 5$ tai enemmän viikossa. Lisäksi $n = 25$.

$$P(X \geq 5) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{5 - 5,6}{\sqrt{0,84}/\sqrt{25}}\right) \approx P(Z \geq -3,2733) = P(Z < 3,2733)$$

```
normcdf(0.6/(sqrt(0.84)/5))
```

ans = 0.9995

Vastaus: 0.9995

Tehtävä 6.

Ratkaisu:

Vastaus: